

Infos: - Vous avez reçu les examens blancs par mail (par contre, copie de un part sur le total de points, sorry ...)
- RaQ avant l'examen 10 janvier dès 14h15



Dérivabilité de fonctions par étapes, précision

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) \stackrel{?}{=} f(x_0) \quad (\Rightarrow f \text{ est continue en } x_0)$$
$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f'(x) \stackrel{?}{=} \lim_{x \rightarrow x_0^+} f'(x) \quad (\stackrel{\text{Thm 6.12}}{\Rightarrow} f \text{ est dérivable en } x_0)$$

⚠ option 2: f pas continue en $x_0 \Rightarrow f$ pas dérivable en x_0

mais $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$ n'existe pas $\nRightarrow f$ pas dérivable en x_0 .

$\hookrightarrow$ retour option 1

Rapide retour sur les suites définies par récurrence: $x_0 = a$, $x_n = f(x_{n-1})$

f croissante $\Rightarrow (x_n)$ monotone

f décroissante $\Rightarrow (x_n)$ pas monotone

Par exemple:

$$\underline{f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in [x_0, l]}$$

$$\Rightarrow \underline{x_0 \leq x_n \leq x_{n+1} \leq l}$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \Rightarrow \end{matrix} \underbrace{f(x_0)}_{x_1} \leq \underbrace{f(x_n)}_{x_{n+1}} \leq \underbrace{f(x_{n+1})}_{x_{n+2}} \leq \underbrace{f(l)}_l$$

$P(n) \nearrow$

$$\begin{matrix} \nwarrow & & \nwarrow P(n+1) \\ x_0 \leq & & \end{matrix}$$

$$\rightarrow x_0 \leq x_{n+1} \leq x_{n+2} \leq l$$

$$\boxed{f'(x) \geq 0} \quad \forall x \in [l, x_0]$$

$$\Rightarrow l \leq x_{n+1} \leq x_n \leq x_0$$

$$\begin{matrix} \nearrow \\ \Rightarrow \end{matrix} f(l) \leq f(x_{n+1}) \leq f(x_n) \leq f(x_0)$$

Remarque 7.2:

On a que f admet un minimum global est équivalent à f prend son minimum.

Définition 7.3 (Point stationnaire)

Soit $x_0 \in D$, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0 . On dit que x_0 est un point stationnaire de f si $f'(x_0) = 0$.

Proposition 7.4 (extremum local condition nécessaire)

Soit $x_0 \in D$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 et dérivable en x_0 . Si f admet un extremum local en x_0 , x_0 est un point stationnaire de f .

Exemple 7.5

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continue $\Rightarrow \text{Im}(f) = \left[\min_{x \in [a, b]} f(x), \max_{x \in [a, b]} f(x) \right]$

Soit $f: [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = e^x \cos(x)$$

& f prend son min ou son max en x_0 , 2 possibilités

1) x_0 vérifie les hypothèses de la prop. 7.4 (f déf. au voisinage de x_0 & f dérivable en x_0) $\rightarrow \underline{f'(x_0) = 0}$

2) x_0 ne vérifie pas les hypothèses de la prop 7.4

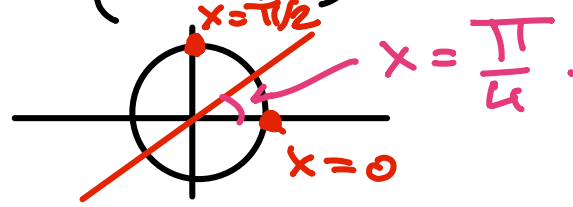
$\rightarrow$ 2a) f n'est pas défini au voisinage de x_0
 $x_0 = a$ ou b , $x_0 = 0$ ou $\pi/2$

$\rightarrow$ 2b) f n'est pas dérivable en x_0

$$1) f'(x) = e^x \cos(x) - e^x \sin(x) = e^x (\cos(x) - \sin(x))$$

$$f'(x) = 0? \quad \sin(x) = \cos(x)$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



$$2a) x=0, x=\frac{\pi}{2}$$

$$2b) \text{ rien } (f \in C^\infty)$$

$$f(0) = 1, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\pi/4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$2 \leq e \leq 3$$

$$3 \leq \pi \leq 4$$

$$, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

plus grande valeur!

plus petite valeur!

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \left[0, e^{\pi/4} \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

Proposition 7.6 (Extremum local condition suffisante)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ pair, I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$,

$f \in C^n(I)$ tq

L'ordre de la 1^{ère} dérivée non-nulle en x_0 est pair

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

(i) si $f^{(n)}(x_0) > 0$, f admet un min local en x_0

(ii) si $f^{(n)}(x_0) < 0$, f admet un max local.

Remarque Si l'ordre de la 1^{ère} dérivée non nulle est impair, alors, on a un point d'inflexion.

(Voir proposition 7.11 p. 107)

$$f(x) = e^x - 1 - x$$

$$f'(x) = e^x - 1 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = e^x \rightarrow f''(0) = 1$$

$\hookrightarrow n=2$ pair $\rightarrow$ extr. local

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2$$

$$f'(x) = e^x - 1 - x \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = e^x - 1 \rightarrow f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x \rightarrow f'''(0) = 1$$

$\hookrightarrow n=3$ impair $\rightarrow$ pt. d'inf.

$$f(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3, \quad f'(x) = e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2 \rightarrow x = 0$$

$$f''(x) = e^x - 1 - x$$

$$f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x - 1$$

$$f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = e^x$$

$$f^{(4)}(0) = 1$$

$\hookrightarrow n=4$ pair
 $\Rightarrow$ extr. local.

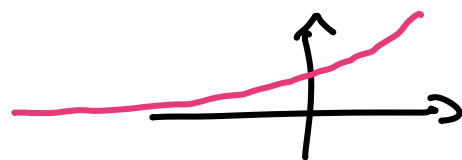
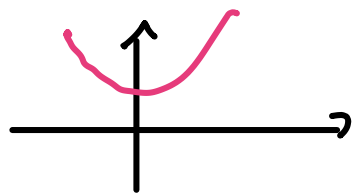
§ 7.3 Convexité

Définition 7.13 (Fonction convexe ou concave)

Soit I un intervalle et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit que :

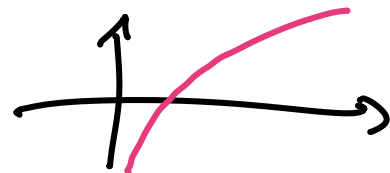
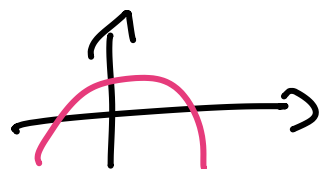
(i) f est convexe si $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$



(ii) f est concave si $\forall x, y \in I, \forall t \in [0, 1]$, on a

$$f((1-t)x + ty) \geq (1-t)f(x) + tf(y)$$



Remarque 7.14:

(i) f est concave $\Leftrightarrow -f$ est convexe.

(ii) $\rightarrow$ voir illustration polycopié page 109)

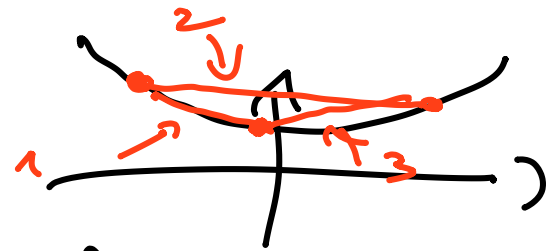
Théorème 7.15 Caractérisation des fonctions convexes.

Soient I un intervalle, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) f est convexe

(ii) $\forall x, y, z \in I$ tq $x < y < z$

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} \leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(z) - f(y)}{z - y}$$



Si de plus, I est ouvert et f est dérivable sur I , les prop. sont également équivalentes à

(iii) f' est croissante

$$(iv) \forall x, y \in I$$

$$f(x) \geq f(y) + f'(y)(x-y)$$

Si de plus, f est 2x dérivable, ces propriétés sont équivalentes à

$$(v) \forall x \in I \quad f''(x) \geq 0$$

Chapitre 8 : Développements limités & séries entières

§ 8.1 Développements limités.

Théorème 8.1

Soit $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ et $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ définie au voisinage de x_0 .

Alors, f est dérivable en x_0 si et seulement si

$\exists m, h \in \mathbb{R}$, et $r: D \rightarrow \mathbb{R}$ tq $r(x_0) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{x - x_0} = 0$ tels que

$$f(x) = h + m \cdot (x - x_0) + r(x)$$

De plus, on a alors, $h = f(x_0)$ et $m = f'(x_0)$

Théorème 8.2 :

Soit I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, et f une fonction dérivable sur I . Alors si

$$a_0 := f(x_0), \quad \forall 1 \leq k \leq n, \quad a_k := \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

$$\exists r: I \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } r(x_0) = 0,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k (x-x_0)^k + r(x)$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Théorème 8.3 (Formule de Taylor)

Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et $f: I \rightarrow \mathbb{R}$
 $n+1$ fois dérivable. Alors, $\forall x \in I$, $\exists \theta_x \in]0,1[$ r(x)

tg

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta_x(x-x_0))}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

un point quelque part entre x_0 & x .

Notation 8.4 ($o(|x-x_0|^n)$, $O(|x-x_0|^n)$)

soient $n \in \mathbb{N}$, $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in D$, $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ définies
au voisinage de x_0 .

(i) On écrit $f(x) = g(x) + o(|x-x_0|^n)$ si

$$f(x_0) = g(x_0) \quad (\Leftrightarrow r(x_0) = 0 \text{ dans le polycop})$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - g(x)}{(x - x_0)^n} = 0. \quad \left(\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{r(x)}{(x - x_0)^n} = 0 \right)$$